

Prof. Dr. Alfred Toth

Kategoriale Projektionen von Subzeichen in semiotischen Zahlenfeldern

1. Nach Bense (1979, S. 53) ist das Zeichen eine triadisch-trichotomische gestufte und „verschachtelte“ Relation bzw. „Relation über Relationen“:

ZR (M, O, I) =									
ZR (M, M=>O, M=>O=>I) =									
ZR (mon. Rel., dyad. Rel., triad. Rel.)									
ZR (.1. .2. .3.) =									
ZR	1.1	1.2	1.3,	1.1	1.2	1.3,	1.1	1.2	1.3
				2.1	2.2	2.3	2.1	2.2	2.3
							3.1	3.2	3.3

Die der Zeichenrelation assoziierte Zahlenfolge ist demnach:

$a \rightarrow (a \rightarrow b)$

$a \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c))$

$a \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d)))$

$a \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow ((a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e))))$.

Setzt man nun

$M \rightarrow a$

$O \rightarrow b$

$I \rightarrow c$

$J \rightarrow d$

$K \rightarrow e$,

wobei (M, O, I) die drei fundamentalen Kategorien der Semiotik sind, die mit den ersten drei Peircezahlen (vgl. Toth 2010) korrespondieren und d und e weitere Interpretanten sind, die für die triadisch-trichotomische Semiotik nicht definiert sind (vgl. Toth 2014), dann bekommt man die folgende Hierarchie für Zeichenrelationen der Form R^n , wobei $n \rightarrow \infty$:

$R^1 = M$

$R^2 = (M \rightarrow (M \rightarrow O))$

$$R^3 = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I)))$$

$$R^4 = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow ((M \rightarrow O \rightarrow I) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I \rightarrow J))))$$

$$R^5 = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow ((M \rightarrow O \rightarrow I) \rightarrow ((M \rightarrow O \rightarrow I \rightarrow J) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K))))), \text{ usw.}$$

Die dazu gehörenden Folgen und Teilfolgen der entsprechenden Peircezahlen sind:

$$R^1 = 1$$

$$R^2 = (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))$$

$$R^3 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$$

$$R^4 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4))))$$

$$R^5 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5))))),$$

usw.

Die relationale Darstellung verschachtelter Relationen setzt, wie in Toth (2020) ausgeführt, die Darstellung in einem 2-dimensionalen Zahlenfeld voraus. Für eine Zeichenrelation Z gilt

$$Z = f(\omega, \sigma),$$

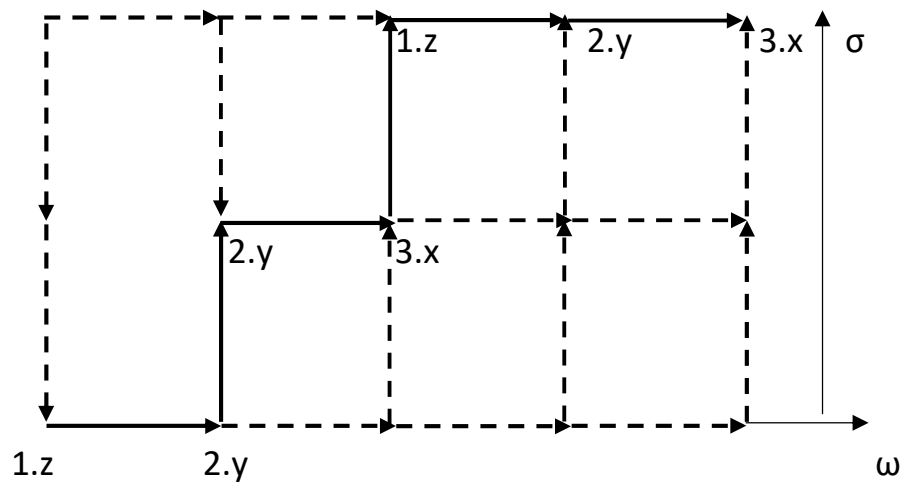
wobei ω der (horizontale) Ort und σ die (vertikale) Einbettungsstufe sind. Zur Darstellung von Z^3 gehen wir aus von

$$Z^3 = (3.x, 2.y, 1.z) \text{ mit } x, y, z \in (1, 2, 3)$$

und bekommen durch relationale Umformung

$$Z^3 = (1.z \rightarrow ((2.y \rightarrow 3.x) \rightarrow (1.z \rightarrow 2.y \rightarrow 3.x))).$$

Damit haben das folgende semiotische Zahlenfeld für die abstrakte Z^3 -Relation



Wie man leicht sieht, gilt

$$n(R) = \sigma,$$

d.h. die relationale Stelligkeit ist gleich der Zahl der Einbettungsstufen einer Relation. (Einfacher Beweis unter Benutzung von Bense 1979, S. 53 u. 64.)

Läßt sich aber auch der Ort ω berechnen? Vergleichen wir die Anzahl von ω relativ zu den Einbettungsstufen:

R^n	ω
$R^1 = 1$	1
$R^2 = (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))$	3
$R^3 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$	6
$R^4 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4))))$	10
$R^5 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5)))))$	15

Wie man sogleich sieht, gehören die Werte für ω zu den Dreieckszahlen (OEIS Folge A000217):

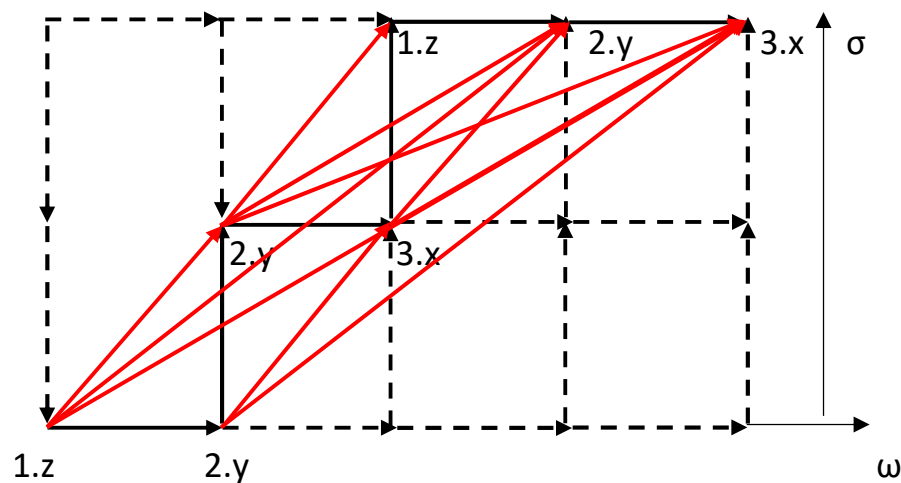
0, **1**, **3**, **6**, **10**, **15**, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, 378, 406, 435, 465, 496, 528, 561, 595, 630, 666, 703, 741, 780, 820, 861, 903, 946, 990, 1035, 1081, 1128, 1176, 1225, 1275, 1326, 1378, 1431

3. Aus dem semiotischen Zahlenfeld können wir nun die folgenden kategorialen Projektionen für die abstrakten Subzeichen ablesen:

	ω	σ
(1.z)	1	1
(1.z)	3	3
(2.y)	2	1
(2.y)	2	2
(2.y)	4	3
(3.x)	3	2
(3.x)	5	3.

In einem Z^3 -Zahlenfeld tritt also das erstheitliche Subzeichen 2 mal, das zweitheitliche 3 mal und das drittheitliche 2 mal auf. Die drei Subzeichen erscheinen somit in 7 kategorialen Projektionen.

Zwischen diesen 7 kategorialen Projektionen gibt es nun weitere Abbildungen, und zwar neben den bereits im Zahlenfeld eingezeichneten horizontalen oder trichotomischen und den vertikalen oder triadischen auch diagonale. Damit treten also alle 3 Arten von Peircezahlen auf (vgl. Toth 2010).



Die diagonalen Abbildungen sind also:

$$(1.z)_{1,1} \rightarrow (1.z)_{3,3}$$

$$(2.y)_{2,1} \rightarrow (2.y)_{4,3}$$

$$(3.x)_{3,2} \rightarrow (2.y)_{5,3}$$

$$(1.z)_{1,1} \rightarrow (2.y)_{2,1}$$

$$(2.y)_{2,1} \rightarrow (3.x)_{3,2}$$

$$(3.x)_{3,2} \rightarrow (3.x)_{5,3}$$

$$(1.z)_{1,1} \rightarrow (2.y)_{4,3}$$

$$(2.y)_{2,1} \rightarrow (3.x)_{5,3}$$

$$(1.z)_{1,1} \rightarrow (3.x)_{3,2}$$

$$(1.z)_{1,1} \rightarrow (3.x)_{5,3}$$

Literatur

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Calculus semioticus. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2010

Toth, Alfred, Zu einer mehrwertigen semiotischen Automatentheorie. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2014

Toth, Alfred, Das semiotische Zahlenfeld. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2020

27.1.2020